СВОЙСТВА МОРСОВСКОЙ ФОРМЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ КОМПАКТНОЕ СЛОЕНИЕ НА M_g^2

И. А. Мельникова

П. Арнуа и Г. Левиттом в работах [1], [2] было показано, что топология слоения морсовской формы ω на компактном многообразии тесно связана со структурой отображения интегрирования $[\omega]\colon H_1(M) \to \mathbb{R}$. В данной работе рассматривается слоение морсовской формы на двумерном многообразии M_g^2. Изучается связь подгруппы $\mathrm{Ker}[\omega] \subset H_1(M_g^2)$ с топологией слоения. Получены следующие результаты: рассмотрена структура подгруппы $\mathrm{Ker}[\omega]$ компактного слоения и доказан критерий компактности слоения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00276.

1. Предварительные определения. Рассмотрим на многообразии M_g^2 замкнутую форму ω с морсовскими особенностями. На множестве $M_g^2 \setminus \operatorname{Sing}\omega$ она определяет слоение $\mathscr{F}$.

Определим на многообразии M_g^2 слоение с особенностями $\mathscr{F}_\omega$ следующим образом.

Пусть в достаточно малой окрестности особой точки $p \in \operatorname{Sing}\omega$ слоение $\mathscr{F}$ локально определяется уровнями функции f_p, причем $f_p(p) = 0$.

Определение 1. *Неособым слоем слоения* $\mathscr{F}_\omega$ называется слой $\gamma \in \mathscr{F}$ такой, что $\forall p \in \operatorname{Sing}\omega \ \ \gamma \cap f_p^{-1}(0) = \varnothing$.

Обозначим $F_p = p \cup \{\gamma \in \mathscr{F} \mid \gamma \cap f_p^{-1}(0) \neq \varnothing\}$. Пусть $F = \bigcup_{p\in \operatorname{Sing}\omega} F_p$.

Определение 2. *Особым слоем слоения* $\mathscr{F}_\omega$ называется компонента связности множества F.

Поскольку форма морсовская, то особых слоев конечное число.

Слоение $\mathscr{F}_\omega$ называется компактным, если все его слои компактны.

Замкнутая форма ω определяет отображение интегрирования по циклам $[\omega]\colon H_1(M_g^2) \to \mathbb{R}$. Образ $\operatorname{Im}[\omega]$ этого отображения представляет собой группу периодов формы ω. Заметим, что $\operatorname{rk}\operatorname{Im}[\omega] = \operatorname{dirr}\omega + 1$, где $\operatorname{dirr}\omega$ – степень иррациональности формы ω.

Если $\operatorname{dirr}\omega \leqslant 0$, то слоение $\mathscr{F}_\omega$ компактно [3]. Если $\operatorname{dirr}\omega \geqslant g$, то слоение $\mathscr{F}_\omega$ имеет некомпактный слой [4]. Если же $0 < \operatorname{dirr}\omega < g$, то слоение может оказаться как компактным, так и некомпактным. Изучение структуры подгруппы $\operatorname{Ker}[\omega]$ позволяет и в последнем случае получить условия компактности слоения.

Рассмотрим операцию пересечения 1-циклов

$$\varphi\colon H_1(M_g^2) \times H_1(M_g^2) \to \mathbb{Z},$$

являющуюся невырожденным, кососимметрическим билинейным отображением.

Ограничение отображения φ на подгруппу $\operatorname{Ker}[\omega] \subset H_1(M_g^2)$ обозначим через φ_ω:

$$\varphi_\omega\colon \operatorname{Ker}[\omega] \times \operatorname{Ker}[\omega] \to \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $\operatorname{rk}\operatorname{Ker}\varphi_\omega \leqslant \operatorname{rk}\operatorname{Ker}[\omega] = 2g - (\operatorname{dirr}\omega + 1)$. Для малых значений $\operatorname{dirr}\omega$ существует лучшая оценка.

Предложение 1. $\operatorname{rk}\operatorname{Ker}\varphi_\omega \leqslant \operatorname{dirr}\omega + 1$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ker}\varphi_\omega = \langle z_1, \dots, z_k\rangle$. Обозначим через Dz_i циклы, двойственные к z_i, тогда $Dz_i \circ z_j = \delta_{ij}$. Предположим, что $\sum n_i \int_{Dz_i}\omega = 0$. Обозначим $z = \sum n_i Dz_i$, тогда, очевидно, $z \in \operatorname{Ker}[\omega]$ и $z \circ z_j = n_j$. Поскольку $z_j \in \operatorname{Ker}\varphi_\omega$, то все $n_j = 0$. Следовательно, интегралы $\int_{Dz_i}\omega$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $\operatorname{dirr}\omega \geqslant k - 1$. Предложение доказано.

Подгруппа $H \subset H_1(M_g^2)$ такая, что $\forall x, y \in H \ \ x \circ y = 0$, называется *изотропной относительно операции пересечения циклов*. Изотропная подгруппа H называется *максимальной*, если $\forall x \notin H \ \exists y \in H \ \ x \circ y \neq 0$.

Заметим, что подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi_\omega$ является изотропной.

Предложение 2. *Пусть H_0 – максимальная изотропная подгруппа в группе* $\operatorname{Ker}[\omega]$. *Тогда* $\operatorname{rk} H_0 = \frac{1}{2}(\operatorname{rk}\operatorname{Ker}[\omega] + \operatorname{rk}\operatorname{Ker}\varphi_\omega)$.

Доказательство. Поскольку отображение φ_ω является симплектической формой на пространстве $\mathrm{Ker}[\omega]\otimes\mathbb{R}$, то утверждение следует из разложения симплектического пространства $\mathrm{Ker}[\omega]\otimes\mathbb{R}$ в прямую сумму попарно ортогональных подпространств: двумерных невырожденных и одномерных вырожденных.

Сопоставим каждому неособому компактному слою $\gamma\in\mathscr{F}_\omega$ его гомологический класс $[\gamma]$. Образ множества неособых компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в $H_1(M_g^2)$. Обозначим ее H_ω. Заметим, что подгруппа H_ω является изотропной и $H_\omega\subset\mathrm{Ker}[\omega]$.

2. Свойства морсовской формы, определяющей компактное слоение.

Теорема 1. *Пусть на многообразии M_g^2 слоение определяется морсовской формой ω. Если слоение $\mathscr{F}_\omega$ компактно, то*

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,\varphi_\omega=\mathrm{dirr}\,\omega+1.$$

Доказательство. Неособые компактные слои слоения $\mathscr{F}_\omega$ порождают подгруппу $H_\omega\subset H_1(M_g^2)$. Число особых слоев конечно, обозначим их $\gamma_1^0,\dots,\gamma_k^0$. Рассмотрим вложения $j_s\colon\gamma_s^0\to M_g^2$, $s=1,\dots,k$, и индуцированные отображения гомологий $j_{s*}\colon H_1(\gamma_s^0)\to H_1(M_g^2)$. В каждой группе $H_1(\gamma_s^0)$ выберем такую максимальную подгруппу Z_s, чтобы образ $j_{s*}Z_s\subset H_1(M_g^2)$ был изотропной подгруппой.

Рассмотрим подгруппу $H_0=\langle H_\omega, j_{s*}Z_s, s=1,\dots,k\rangle$. Очевидно, подгруппа H_0 является изотропной и $H_0\subset\mathrm{Ker}[\omega]$.

Рассмотрим цикл $z\in H_1(M_g^2)$ такой, что $z\circ H_0=0$. Тогда $z\circ H_\omega=0$. В работе [5] (см. доказательство теоремы 1.2) было показано, что если слоение $\mathscr{F}_\omega$ компактно и $z\circ H_\omega=0$, то цикл z реализуется кривой $\alpha\subset\cup\gamma_s^0$. Будем считать, что $\alpha=\sum\alpha_s$, где $\alpha_s\subset\gamma_s^0$. По условию $z\circ j_{s*}Z_s=0$ для всех s, следовательно, $[\alpha_s]\circ j_{s*}Z_s=0$, поскольку при $p\neq s$ $\alpha_p\cap\gamma_0^s=\varnothing$. Так как $\alpha_s\subset\gamma_0^s$, то $[\alpha_s]\in\mathrm{Im}\,j_{s*}$, следовательно, в силу построения группы Z_s получаем, что $[\alpha_s]\in j_{s*}Z_s$ и соответственно $z\in H_0$.

Таким образом, подгруппа H_0 является максимальной в группе $H_1(M_g^2)$. Следовательно, как было показано в работе [5], $\mathrm{rk}\,H_0=g$. С другой стороны, H_0 максимальна в группе $\mathrm{Ker}[\omega]$ и согласно предложению 2 $\mathrm{rk}\,H_0=\frac{1}{2}(\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}[\omega]+\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,\varphi_\omega)$. Поскольку $\mathrm{dirr}\,\omega=2g-1-\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}[\omega]$, то теорема доказана.

Замечание. В обратную сторону теорема неверна, т.е. существуют некомпактные слоения, для которых приведенное равенство выполняется.

3. Критерий компактности слоения. В работе [4] было показано, что если существует g гомологически независимых компактных слоев, то все слои компактны. С учетом структуры подгруппы $\mathrm{Ker}[\omega]$ этот признак компактности можно усилить. Рассмотрим пересечение $H_\omega\cap\mathrm{Ker}\,\varphi_\omega$.

Теорема 2. *Слоение $\mathscr{F}_\omega$ компактно тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{rk}(H_\omega\cap\mathrm{Ker}\,\varphi_\omega)\geqslant\mathrm{dirr}\,\omega.$$

Доказательство. Если $\operatorname{dirr}\omega \leqslant 0$, то слоение компактно согласно [3]. Пусть $\operatorname{dirr}\omega \geqslant 1$, тогда $k = \operatorname{rk}(H_\omega \cap \operatorname{Ker}\varphi_\omega) \geqslant 1$.

Рассмотрим неособые слои $\gamma_i \in \mathscr{F}_\omega$ такие, что $H_\omega \cap \operatorname{Ker}\varphi_\omega = \langle [\gamma_1], \dots, [\gamma_k] \rangle$. Как было показано в предложении 1, интегралы $\int_{D[\gamma_i]} \omega$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $\operatorname{dirr}\omega \geqslant k-1$. По условию $\operatorname{dirr}\omega \leqslant k$, следовательно, $\operatorname{dirr}\omega$ определяется интегралами по $D[\gamma_1], \dots, D[\gamma_k]$ и, возможно, по некоторому циклу z.

Разрежем многообразие M_g^2 по слоям γ_i. Поскольку они гомологически независимы, в результате получим связное многообразие M' с краем. Число компонент связности края равно $2k$. Ограничение формы ω на многообразие M' обозначим ω'. Поскольку циклы $D[\gamma_i]$ при разрезании исчезают, то $\operatorname{dirr}\omega' \leqslant 0$.

Заклеим каждую компоненту связности края диском D_i^2, в результате получим многообразие M_{g-k}^2. Продолжим форму ω' на диски D_i^2 таким образом, чтобы на каждом D_i^2 полученная форма ω'' была морсовской и имела одну особую точку типа максимума или минимума. Очевидно, $\operatorname{dirr}\omega'' \leqslant 0$ и слоение $\mathscr{F}_{\omega''}$, является компактным. Следовательно, компактно и слоение $\mathscr{F}_\omega$. В одну сторону теорема доказана.

Обратно, пусть слоение $\mathscr{F}_\omega$ компактно. Покажем, что тогда $\operatorname{Im}[\omega] = D\operatorname{Ker}\varphi_\omega$. Действительно, согласно доказательству предложения 1 $D\operatorname{Ker}\varphi_\omega \subseteq \operatorname{Im}[\omega]$. По теореме 1 $\operatorname{rk}\operatorname{Ker}\varphi_\omega = \operatorname{dirr}\omega + 1$, с другой стороны, $\operatorname{rk}\operatorname{Im}[\omega] = \operatorname{dirr}\omega + 1$, следовательно, $\operatorname{Im}[\omega] = D\operatorname{Ker}\varphi_\omega$. Таким образом, если слоение $\mathscr{F}_\omega$ компактно, то $H_1(M_g^2) = \operatorname{Ker}[\omega] \oplus D\operatorname{Ker}\varphi_\omega$.

Пусть $H_\omega = \langle [\gamma_1], \dots, [\gamma_N] \rangle$. Из доказательства теоремы 2.2 [5] следует, что $\operatorname{dirr}\omega + 1 = \operatorname{rk}_{\mathbf{Q}}\{\int_{D\gamma_1}\omega, \dots, \int_{D\gamma_N}\omega\}$. Перенумеруем слои таким образом, что $\forall i \leqslant s$ $\int_{D\gamma_i}\omega \neq 0$, а $\forall i > s$ $\int_{D\gamma_i}\omega = 0$. Тогда

$$\operatorname{dirr}\omega + 1 = \operatorname{rk}_{\mathbf{Q}}\Bigl\{\int_{D\gamma_1}\omega, \dots, \int_{D\gamma_s}\omega\Bigr\} \leqslant \operatorname{rk}\langle [\gamma_1], \dots, [\gamma_s] \rangle \leqslant \operatorname{rk}(H_\omega \cap \operatorname{Ker}\varphi_w),$$

поскольку, как было показано выше, если $\int_{D\gamma_i}\omega \neq 0$, то $[\gamma_i] \in \operatorname{Ker}\varphi_\omega$. Теорема доказана.

Таким образом, для компактности слоения достаточно существования $\operatorname{dirr}\omega$ гомологически независимых слоев, классы гомологий которых принадлежат подгруппе $\operatorname{Ker}\varphi_\omega$. В частности, если $\operatorname{dirr}\omega = 1$ и существует негомологичный нулю слой γ, $[\gamma] \in \operatorname{Ker}\varphi_\omega$, то слоение компактно.

Автор выражает благодарность профессору А. С. Мищенко за внимание к работе и полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: melnikova@micron.msk.ru

Поступило
18.06.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnoux P., Levitt G. // Invent. Math. 1986. V. 84. P. 141–156. **2**. Levitt G. // Invent. Math. 1987. V. 88. P. 635–667. **3**. Новиков С. П. // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 3–49. **4**. Мельникова И. А. // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №3. С. 158–160. **5**. Мельникова И. А. Компактные слоения морсовских форм. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1996.